Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

3 de Março de 2004

Semana 1

1. Escreva os seguintes números complexos na forma $a + bi$ e represente-os geometricamente no plano de Argand:

   a) $(2+i)(1-i)$ b) $\dfrac{1}{1-i}$ c) $\dfrac{2+i}{1+i}$

   d) $(2-3i)^2$ e) $\overline{(1-2i)^3}$ f) i^{234}

2. Determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos e represente-os geometricamente:

   a) 3 b) -2 c) $1+i$

   d) $3-4i$ e) $-1-i$

3. Calcule e represente geometricamente os númeors complexos

   a) $\sqrt[3]{i}$ b) $\sqrt[4]{-1}$ c) $\sqrt{1-i}$

   d) $\sqrt[4]{(3-i\sqrt{3})^6}$ e) $\left(\sqrt[4]{3-i\sqrt{3}}\right)^6$

4. Mostre as seguintes desigualdades:

   a) $|\text{Im}(z)| \leq |z| \leq |\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)|$
   b) $|z+w| \leq |z| + |w|$
   c) $|z+w| \geq ||z| - |w||$

5. Esboçe no plano complexo o conjunto dos números complexos que satisfazem as relações seguintes:

   a) $|z-2| = 3$
   b) $|z-2| + |z+2| = 5$
   c) $|z-1| - |z+1| > 2$

d) $|z| = \mathrm{Re}(z) + 2$

e) $\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(z) < 1$

f) $\mathrm{Im}\left(\frac{z-i}{z-1}\right) = 0$

g) $\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$

6. Resolva as seguintes equações em $\mathbb{C}$:

   a) $z^4 + 16i = 0$

   b) $z\overline{z} - z + \overline{z} = 0$

   c) $z^4 + z^2 = -1 - i$

   d) $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 6i$

   e) $z^6 = (i+2)^3 + \frac{1-28i}{2-i}$

7. Determine todos os vértices de um polígono regular de n lados, centrado na origem, sabendo que um deles é representado pelo complexo z_1.

8. Sejam z_1, z_2 e z_3 três números complexos de módulo unitário satisfazendo $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Mostre que esses complexos são vértices de um triângulo equilátero.